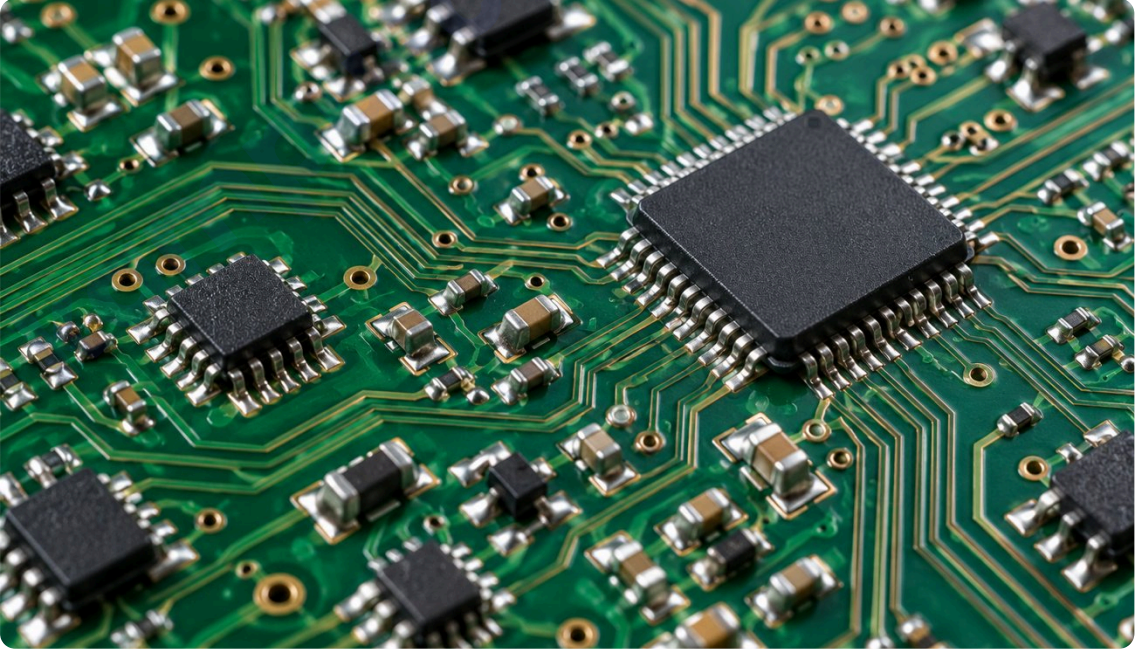


B Ö L Ü M

4

Boole Cebri ve Lojik Kapılar



4.1 Boole Cebri

- ◆ Önermeler veya nesneler arasındaki ilişkileri betimler.
- ◆ Simgesel matematiksel bir mantık sistemidir.
- ◆ 1854, George Boole: mantık cebri.
- ◆ 1938, Shannon: anahtar cebri.
- ◆ Bilgisayarlarda kullanılan devrelerin tasarımı için gerekli temeldir.

Boole Cebri'nin Esasları

- ◆ Bir değişmez (sabit değişken), 1 ya da 0 şeklinde iki değer alabilir.
- ◆ İfadeler sabit değişkenin kendisi ya da tümleyenidir (değili / tersi).
- ◆ Ve (AND) bağlacı ($\cdot$, $\wedge$), Veya (OR) bağlacı ($+$, $\vee$), Değil (NOT) ($\neg$, $'$) ile gösterilir.

x	y	$x \cdot y$	$x \wedge y$	$x + y$	$x \vee y$
Doğru	Doğru	Doğru	Doğru		
Yanlış	Doğru	Yanlış	Doğru		
Doğru	Yanlış	Yanlış	Doğru		
Yanlış	Yanlış	Yanlış	Yanlış		

x	y	$x \cdot y$	$x \wedge y$	$x + y$	$x \vee y$
1	1	1			
0	1	0			
1	0	0			
0	0	0			

x	y	$x \cdot y$	$x \wedge y$	$x + y$	$x \vee y$	$\bar{x}$
0	0	0				1
0	1	0				1
1	0	0				0
1	1	1				0

4.2 Boole Cebri Kuralları

Değişme kuralı	$X + Y = Y + X$	$X \cdot Y = Y \cdot X$
Birleşme kuralı	$X + Y + Z = (X + Y) + Z = X + (Y + Z)$	$X \cdot Y \cdot Z = (X \cdot Y) \cdot Z = X \cdot (Y \cdot Z)$
Dağılma kuralı	$X \cdot (Y + Z) = X \cdot Y + X \cdot Z$	$(X + Y) \cdot (X + Z) = X + Y \cdot Z$
Özdeşlik kuralı	$X + X = X$	$X \cdot X = X$
“Ve” kuralı	$X \cdot 1 = X$	$X \cdot 0 = 0$
“Veya” kuralı	$X + 0 = X$	$X + 1 = 1$
Tamamlayıcı kural	$X + \bar{X} = 1$	$X \cdot \bar{X} = 0$
De Morgan kuralı	$\overline{X \cdot Y} = \bar{X} + \bar{Y}$	$\overline{X + Y} = \bar{X} \cdot \bar{Y}$
Tersin tersi kuralı	$\overline{\bar{X}} = X$	$\overline{\overline{X + Y}} = X + Y \quad \overline{\overline{X \cdot Y}} = X \cdot Y$

4.3 Çözümlü Sorular

SORU 1

A, B ve C sırasıyla Doğru, Yanlış, Doğru olduğuna göre aşağıda verilen soruları cevaplayınız.

ÇÖZÜM

A = 1, B = 0, C = 1 alınır.

a) $\bar{A} + B + \bar{C} = ?$

$$\bar{1} + 0 + \bar{1} = 0 + 0 + 0 = 0$$

b) $A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} = ?$

$$1 \cdot \bar{0} \cdot \bar{1} = 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0$$

c) $A(A + \bar{B}) = ?$

$$A \cdot A + A \cdot \bar{B} = A + A \cdot \bar{B} = 1 + 1 \cdot \bar{0} = 1 + 1 \cdot 1 = 1$$

d) $AB + A\bar{B} = ?$

$$A \cdot (B + \bar{B}) = A \cdot 1 = A = 1$$

SORU 2

$X \cdot Y + X$ fonksiyonuna ait doğruluk tablosu nedir?

ÇÖZÜM

$$X \cdot Y + X = X \cdot \underbrace{(Y + 1)}_1 = X$$

x	y	$x \cdot y + x$
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	1

SORU 3

$X \cdot Y + \overline{X} \cdot Y + \overline{Y} = ?$

ÇÖZÜM

$$Y \cdot \underbrace{(X + \overline{X})}_1 + \overline{Y} = Y + \overline{Y} = 1$$

SORU 4

$X \cdot Y \cdot Z + X \cdot Y \cdot \overline{Z} + \overline{X} \cdot Y = ?$

ÇÖZÜM

$$\begin{aligned} X \cdot Y \cdot \underbrace{(Z + \overline{Z})}_1 + \overline{X} \cdot Y &= X \cdot Y + \overline{X} \cdot Y \\ &= Y \cdot \underbrace{(X + \overline{X})}_1 = Y \end{aligned}$$

SORU 5

$X \cdot (\overline{X} + Y) = ?$

ÇÖZÜM

$$\underbrace{X \cdot \overline{X}}_0 + X \cdot Y = X \cdot Y$$

4.4 Lojik Kapılar



VE Kapısı (AND)



VEYA Kapısı (OR)



DEĞİL Kapısı (NOT)



VE DEĞİL Kapısı (NAND)



VEYA DEĞİL Kapısı (NOR)



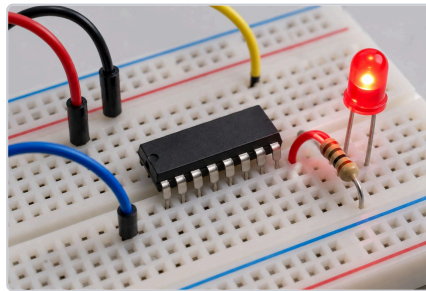
YA DA Kapısı (XOR)



YA DA DEĞİL Kapısı (XNOR)

Temel lojik kapılar ve simgeleri

Kapı	Çıkış ne zaman 1 olur?	Not
VE (AND)	Yalnızca tüm girişler 1 ise	Diğer tüm durumlarda çıkış 0'dır.
VEYA (OR)	Girişlerden en az biri 1 ise	Yalnızca tüm girişler 0 ise çıkış 0'dır.
DEĞİL (NOT)	Giriş 0 ise	Girişin tersini verir; tek girişli kapıdır.
VE DEĞİL (NAND)	Girişlerden en az biri 0 ise	VE kapısının tersidir; yalnızca tüm girişler 1 ise çıkış 0'dır.
VEYA DEĞİL (NOR)	Yalnızca tüm girişler 0 ise	VEYA kapısının tersidir.
YA DA (XOR)	Girişler birbirinden farklı ise	Girişler aynı ise çıkış 0'dır.
YA DA DEĞİL (XNOR)	Girişler aynı ise	XOR kapısının tersidir.



Lojik kapılar gerçekte bu tür entegre devrelerin içinde bulunur; devre tahtasına takılı bir entegre ve çıkışı gösteren LED

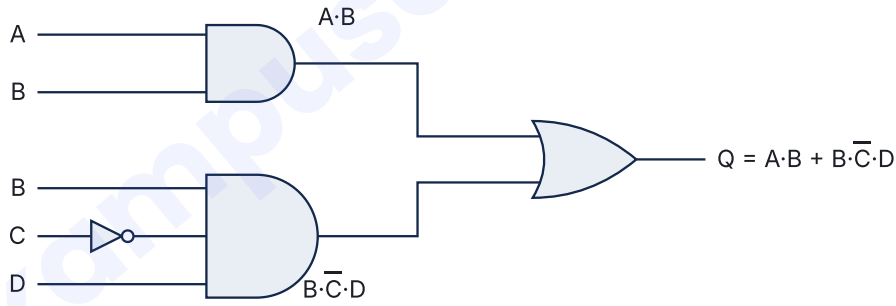
EK BİLGİ: KAPILARIN DOĞRULUK TABLOSU

A	B	AND	OR	NAND	NOR	XOR	XNOR
0	0	0	0	1	1	0	1
0	1	0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	1	0	1	0
1	1	1	1	0	0	0	1

NAND ve NOR, AND ve OR çıkışlarının tersidir. XOR, girişler birbirinden farklıyken 1 verir; XNOR ise girişler aynıyken 1 verir.

4.5 Lojik Kapı Soruları**ÖRNEK 1**

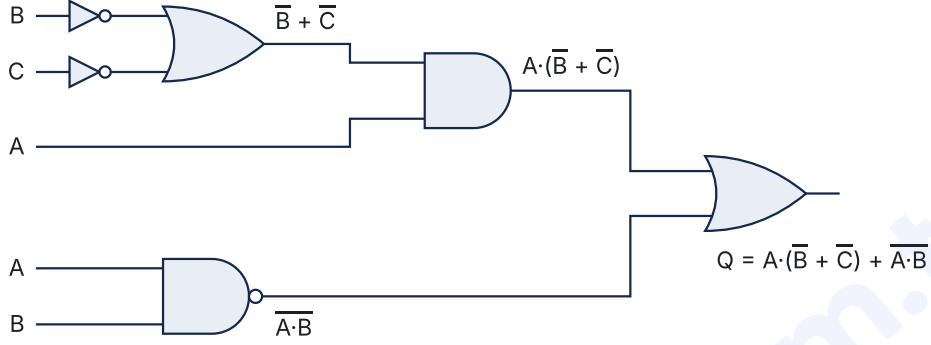
$A \cdot B + B \cdot \bar{C} \cdot D$ ifadesinin lojik diyagramını çiziniz.

ÇÖZÜM

ÖRNEK 2

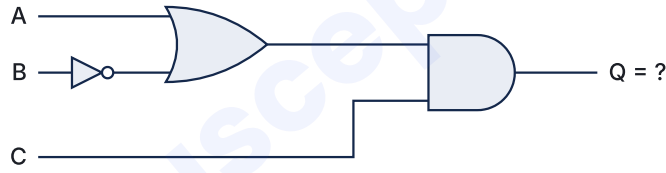
$Q = [A(\bar{B} + \bar{C})] + \overline{A \cdot B}$ ifadesinin lojik diyagramını çiziniz.

ÇÖZÜM



ÖRNEK 3

Aşağıdaki lojik diyagramın lojik ifadesini yazınız.



ÇÖZÜM

$$Q = (A + \bar{B}) \cdot C$$