

B Ö L Ü M

2

Ortalamalar



İstatistik serileri ve grafikler, ait oldukları olay hakkında bilgi vermekle birlikte bu bilgilerin nesnelliği düşüktür.

TANIM

Gözlem değerlerinden oluşan veri kümesinin hangi değer etrafında kümелendiğini gösteren, ilgili kümenin özelliğini özetleyen, daha nesnel bilgi niteliğindeki tek değer hesaplanmasına imkân veren ölçülere **ortalama** denir.

2.1 Duyarlı Ortalamalar

Duyarlı ortalamalar üç başlıkta incelenir:

- ◆ Aritmetik ortalama
- ◆ Geometrik ortalama
- ◆ Kareli ortalama

Bu grupta yer alan ortalamaların ortak özellikleri şunlardır:

- ◆ Ortalama hesaplanırken serinin bütün gözlem değerleri dikkate alınır.
- ◆ Gözlem değerlerinde meydana gelebilecek değişiklikten hemen etkilenirler.

2.2 Aritmetik Ortalama

Aritmetik ortalama $\bar{x}$ sembolü ile gösterilir.

$$\text{A.O.} = \bar{x} = \frac{\sum x}{n}$$

ÖRNEK 1

Sekiz gözlem değerinden oluşan bir seri (₺/ay) aşağıda verilmiştir. Serinin aritmetik ortalamasını bulunuz.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
640	800	860	980	1 120	1 160	1 560	1 680

ÇÖZÜM

$$\sum x = 640 + 800 + 860 + 980 + 1120 + 1160 + 1560 + 1680 = 8800$$

$$\bar{x} = \frac{8800}{8} = 1100 \text{ ₺/ay}$$



Firmaların ödedikleri vergi tutarları

ÖRNEK 2

Bir ilde faaliyette bulunan firmaların 2026 yılında ödedikleri vergi tutarlarının dağılımı tabloda gösterilmektedir. 2026 yılı ortalama vergi tutarı nedir?

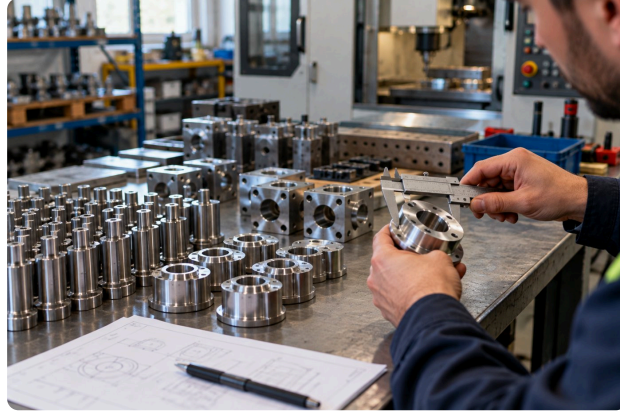
ÇÖZÜM

Her grubun orta değeri x_i olarak alınır; örneğin ilk grup için $x_1 = \frac{100+200}{2} = 150$ bulunur.

Gruplar (bin ₺)	n_i	x_i	$n_i \cdot x_i$
100 – 200	7	150	1 050
200 – 300	18	250	4 500
300 – 400	25	350	8 750
400 – 500	30	450	13 500
500 – 600	20	550	11 000
Toplam	100		38 800

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i \cdot n_i}{\sum n_i}$$

$$\bar{x} = \frac{38\,800}{100} = 388 \text{ bin ₺}$$



Üretim serisi: üretilen parçaların kontrolü

ÖRNEK 3

70 gözlem değerinden oluşan üretim serisi aşağıda gruplandırılmış olarak verilmektedir.

ÇÖZÜM

Gruplar	n_i	x_i	$x_i \cdot n_i$
10 – 20	3	15	45
20 – 30	5	25	125
30 – 40	17	35	595
40 – 50	15	45	675
Toplam	40		1 440

$$\bar{x} = \frac{1440}{40} = 36$$

İlk dört grubun (1. serinin) ortalaması

Gruplar	n_i	x_i	$x_i \cdot n_i$
50 – 75	12	62,5	750
75 – 100	14	87,5	1 225
100 – 125	3	112,5	337,5
125 – 150	1	137,5	137,5
Toplam	30		2 450

$$\bar{x} = \frac{2450}{30} = 81,67$$

Son dört grubun ortalaması

2.3 Geometrik Ortalama

$$\log \text{G.O.} = \frac{\sum \log x_i}{n}$$

$$\text{G.O.} = \text{antilog} (\log \text{G.O.})$$



Lojistik işletmelerinde taşıma kapasitesi

ÖRNEK 4

İstanbul'da faaliyet gösteren 120 lojistik işletmesi için bir yıllık taşıma kapasiteleri ton cinsinden gruplandırılmış seri olarak tabloda verilmiştir. Ortalama taşıma miktarını geometrik ortalama ile hesaplayalım.

ÇÖZÜM

Gruplar (ton)	n_i	x_i	$\log x_i$	$\log x_i \cdot n_i$
600 – 800	3	700	2,84510	8,53529
800 – 1 000	7	900	2,95424	20,67970
1 000 – 1 200	11	1 100	3,04139	33,45532
1 200 – 1 400	22	1 300	3,11394	68,50675
1 400 – 1 600	40	1 500	3,17609	127,04365
1 600 – 1 800	24	1 700	3,23045	77,53077
1 800 – 2 000	9	1 900	3,27875	29,50878
2 000 – 2 200	4	2 100	3,32222	13,28888
Toplam	120			378,54915

$$\log \text{G.O.} = \frac{\sum \log x_i \cdot n_i}{\sum n_i} = \frac{378,54915}{120} = 3,154576$$

$$\text{G.O.} = 10^{3,154576} = 1427,5 \text{ ton}$$

2.4 Kareli Ortalama

$$\text{K.O.} = \sqrt{\frac{\sum x_i^2 \cdot n_i}{\sum n_i}}$$



Üretim işletmelerinde aylık üretim miktarları

ÖRNEK 5

100 üretim işletmesinin aylık üretim miktarları (1000 ton) gruplandırılmış seri olarak düzenlenmiş ve aşağıda verilmiştir. Verilen serinin **a)** aritmetik ortalamasını, **b)** geometrik ortalamasını, **c)** kareli ortalamasını hesaplayınız.

ÇÖZÜM

Gruplar	n_i	x_i	$x_i \cdot n_i$	$\log x_i$	$\log x_i \cdot n_i$	x_i^2	$x_i^2 \cdot n_i$
5 - 15	10	10	100	1,00000	10,00000	100	1 000
15 - 25	15	20	300	1,30103	19,51545	400	6 000
25 - 35	35	30	1 050	1,47712	51,69924	900	31 500
35 - 45	25	40	1 000	1,60206	40,05150	1 600	40 000
45 - 55	15	50	750	1,69897	25,48455	2 500	37 500
Toplam	100		3 200		146,75074		116 000

a) Aritmetik ortalama

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i \cdot n_i}{\sum n_i} = \frac{3200}{100} = 32 \text{ bin ton}$$

b) Geometrik ortalama

$$\log \text{G.O.} = \frac{\sum \log x_i \cdot n_i}{\sum n_i} = \frac{146,75074}{100} = 1,46751$$

$$\text{G.O.} = 10^{1,46751} = 29,34 \text{ bin ton}$$

c) Kareli ortalama

$$\text{K.O.} = \sqrt{\frac{116\,000}{100}} = \sqrt{1160} = 34,06 \text{ bin ton}$$

2.5 Duyarlı Olmayan Ortalamalar: Medyan

TANIM

Küçük değerlerden büyük değerlere doğru sıralanmış gözlem değerlerinden oluşan bir seriyi, gözlem sayısı bakımından iki eşit kısma ayıran değere **medyan** denir.

NOT

Gözlem sayısı (n) **tek** ise medyan, $\frac{n+1}{2}$. sıradaki değerdir. Gözlem sayısı **çift** ise medyan, $\frac{n}{2}$. ve $(\frac{n}{2} + 1)$. sıradaki iki değerlerin ortalamasıdır.

ÖRNEK 6

x_i : 10, 5, 19, 8, 3 serisinin medyanını bulunuz.

ÇÖZÜM

Değerler küçükten büyüğe sıralanır: **3, 5, 8, 10, 19**.

$$n = 5 \text{ (tek)} \quad \frac{n+1}{2} = \frac{5+1}{2} = 3$$

Medyan 3. sıradaki değerdir: **Med = 8**.

ÖRNEK 7

x_i : 257, 239, 97, 385, 50, 249 serisinin medyanını bulunuz.

ÇÖZÜM

Değerler küçükten büyüğe sıralanır: **50, 97, 239, 249, 257, 385**.

$$n = 6 \text{ (çift)} \quad \frac{n}{2} = 3 \quad x_3 = 239, \quad x_4 = 249$$

$$\text{Med} = \frac{x_3 + x_4}{2} = \frac{239 + 249}{2} = 244$$

ÖRNEK 8

Elazığ'da faaliyet gösteren 100 un fabrikasının günlük üretim miktarları tabloda frekans serisi olarak verilmiştir. Medyan ortalamasını hesaplayınız.

ÇÖZÜM

Üretim (x_i , ton)	n_i	"-den az"
100	7	7
200	18	25
300	25	50
400	30	80
500	12	92
600	8	100
Toplam	100	

$$n = 100 \text{ (çift)} \quad \frac{n}{2} = 50$$

Medyan 50. ve 51. sıradaki gözlemlerin ortalamasıdır. "-den az" sütununa göre ilk 50 gözlem 300 ton ve altındadır; dolayısıyla **50. gözlem 300, 51. gözlem 400** tondur.

$$\text{Med} = \frac{x_{50} + x_{51}}{2} = \frac{300 + 400}{2} = 350 \text{ ton}$$

Gruplandırılmış Seride Medyan Hesabı

$$\text{Med} = l_a + \frac{\frac{n}{2} - n_a}{n_m} \times c_m$$

- ◆ l_a : medyan sınıfının alt limiti
- ◆ n : serideki gözlem sayısı
- ◆ n_a : medyan sınıfına kadar olan sınıfların frekansları toplamı
- ◆ n_m : medyan sınıfının frekansı
- ◆ c_m : medyan sınıfının sınıf aralığı

ÖRNEK 9

50 erkek öğrencinin ağırlıkları ölçülerek aşağıdaki gruplandırılmış seri elde edilmiştir. Medyan ağırlığı kaçtır?

ÇÖZÜM

Ağırlık grupları (kg)	n_i	"-den az"
60 - 63	1	1
63 - 66	2	3
66 - 69	13	16
69 - 72	20	36
72 - 75	11	47
75 - 78	3	50
Toplam	50	

$$\frac{n}{2} = \frac{50}{2} = 25$$

"-den az" sütununda 25'i ilk kez geçen değer 36'dır; bu yüzden **medyan sınıfı 69 - 72'dir**.

$$l_a = 69 \quad n = 50 \quad n_a = 16 \quad n_m = 20 \quad c_m = 3$$

$$\text{Med} = 69 + \frac{25 - 16}{20} \times 3 = 69 + 1,35 = 70,35 \text{ kg}$$

2.6 Mod

TANIM

Bir seride **en çok tekrarlanan** gözlem değerine **mod** denir.

ÖRNEK 10

x_i : 68, 71, 74, 47, 32, 74, 71, 74 serisinin modunu bulunuz.

ÇÖZÜM

74 değeri seride üç kez, 71 iki kez, diğer değerler birer kez geçmektedir. En çok tekrarlanan değer 74 olduğu için **Mod = 74**'tür.

Gruplandırılmış Seride Mod Hesabı

$$\text{Mod} = l_a + \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} \times c_m$$

- ◆ l_a : mod sınıfının alt limiti
- ◆ Δ_1 : mod sınıfının frekansı ile bir önceki sınıfın frekansı arasındaki fark
- ◆ Δ_2 : mod sınıfının frekansı ile bir sonraki sınıfın frekansı arasındaki fark
- ◆ c_m : mod sınıfının sınıf aralığı

ÖRNEK 11

Bir sanayi bölgesinde faaliyet gösteren 120 işletmenin geçen 12 aylık sürede tükettikleri elektrik enerjisi miktarları aşağıda gruplandırılmış seri olarak verilmiştir. Mod tüketim miktarını hesaplayınız.

ÇÖZÜM

Enerji tüketim miktarı (kWh)	İşletme sayısı
1500 - 2000	16
2000 - 2500	27
2500 - 3000	38
3000 - 3500	20
3500 - 4000	14
4000 - 4500	5
Toplam	120

En yüksek frekans 38 olduğu için **mod sınıfı 2500 - 3000**'dir.

$$l_a = 2500 \quad \Delta_1 = 38 - 27 = 11 \quad \Delta_2 = 38 - 20 = 18 \quad c_m = 500$$

$$\text{Mod} = 2500 + \frac{11}{11 + 18} \times 500 = 2500 + 189,66 = 2689,66 \text{ kWh}$$